4 PRINCIPE D'EQUIVALENCE
et système de coord. localement inertiel (SCLI)

→ D'après le PE (principe d'équivalence), dans des régions suffisamment restreintes de l'e-t, on peut annuler les effets de la gravitation en se plaçant dans un référentiel en chute libre (= SCLI)

↳ Localement, $g_{\mu\nu} \to \eta_{\mu\nu}$

4.1 SCLI

Prop En tout point $p \in M$, il existe un système de coordonnées $x^{\hat{\mu}}$ dans lequel :

① $g_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \eta_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ ② $\partial_{\hat{\mu}} g_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = 0$

Un tel système de coord est dit localement inertiel

$\boxed{\text{DEMO}}$

Soit $g_{\mu\nu}$ une métrique en coord. locales x^μ, et $x^{\hat{\mu}}$ les coord. LI recherchées. $(x^{\hat{\mu}}(x^\mu))$

→ La métrique se transforme selon $g_{\hat{\mu}\hat{\nu}}\big|_p = \dfrac{\partial x^\mu}{\partial x^{\hat{\mu}}} \dfrac{\partial x^\nu}{\partial x^{\hat{\nu}}} g_{\mu\nu}\big|_p$

→ Autour du point P, développons les anciennes coords :

$$x^\mu(x^{\hat{\nu}}) = \underbrace{x^\mu(x^{\hat{\nu}}_p)}_{0} + \underbrace{\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\hat{\mu}}}\right)}_{A}(x^{\hat{\mu}} - \underbrace{x^{\hat{\mu}}_p}_{0}) + \frac{1}{2!}\underbrace{\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x^{\hat{\alpha}} \partial x^{\hat{\beta}}}}_{B}(x^{\hat{\alpha}} - \underbrace{x^{\hat{\alpha}}_p}_{0})(x^{\hat{\beta}} - \underbrace{x^{\hat{\beta}}_p}_{0})$$

$$+ \frac{1}{3!}\underbrace{\frac{\partial^3 x^\mu}{\partial x^{\hat{\alpha}} \partial x^{\hat{\beta}} \partial x^{\hat{\gamma}}}}_{C}(x^{\hat{\alpha}} - \underbrace{x^{\hat{\alpha}}_p}_{0})(x^{\hat{\beta}} - \underbrace{x^{\hat{\beta}}_p}_{0})(x^{\hat{\gamma}} - \underbrace{x^{\hat{\gamma}}_p}_{0})$$

$$\Rightarrow x^\mu(x^{\hat{\nu}}) = A^\mu_{\hat{\mu}}\, x^{\hat{\mu}} + \frac{1}{2} B^\mu_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}\, x^{\hat{\alpha}} x^{\hat{\beta}} + \frac{1}{6} C^\mu_{\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{\gamma}}\, x^{\hat{\alpha}} x^{\hat{\beta}} x^{\hat{\gamma}}$$

① Condition $g_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \eta_{\hat{\mu}\hat{\nu}} \overset{!}{=} A^\mu_{\hat{\mu}} A^\nu_{\hat{\nu}}\, g_{\mu\nu}$

En $d=4$, $A^\mu_{\hat{\mu}}$ a 16 composantes indépendantes, alors que $g_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ en a 10. On utilise 10 des 16 composantes de A pour amener $g_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ dans sa forme canonique. Les 6 autres correspondent aux 6 paramètres du groupe de Lorentz qui préservent $\eta_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$

② Condition $\partial_{\hat\mu} g_{\hat\mu\hat\nu} = 0$

$$\partial_{\hat\mu} g_{\hat\mu\hat\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\hat\alpha}} \partial_\alpha \left(g_{\mu\nu} A^\mu_{\hat\mu} A^\nu_{\hat\nu} \right)$$

$$= A^\mu_{\hat\mu} A^\nu_{\hat\nu} A^\alpha_{\hat\alpha} \partial_\alpha g_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} A^\nu_{\hat\nu} B^\mu_{\hat\alpha\hat\mu} + g_{\mu\nu} A^\mu_{\hat\mu} B^\nu_{\hat\alpha\hat\nu}$$

Or, $\partial_{\hat\alpha} g_{\hat\mu\hat\nu} \rightsquigarrow 4 \times 10$ composantes à annuler, et $\underbrace{B^{\hat\mu}_{\hat\alpha\hat\nu}}_{\text{symétrique}} \rightsquigarrow 4 \cdot \frac{4 \times 5}{2} = 40$

③ Annuler les $\partial^2 g$?

$\rightarrow \partial_{\hat\alpha} \partial_{\hat\beta} g_{\hat\mu\hat\nu} \sim 100$ conditions

$\rightarrow C^{\hat\alpha}_{\hat\beta\hat\gamma} \sim 80$ choix

} non !

4.2 Métrique, élément de longueur, courbes

DEF Une variété M munie d'une métrique Lorentzienne g est appelée variété Lorentzienne et est notée (M, g)

Soit $\mathcal{C} : \mathbb{R} \to M : \lambda \mapsto \mathcal{C}(\lambda)$ une courbe sur M, de coordonnées $\varphi[\mathcal{C}(\lambda)] = x^\mu(\lambda)$. Son vecteur tangent est $X = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \cdot \partial_\mu$

$P = x^\mu(\lambda)$ X

DEF → La norme de ce vecteur est donnée par :

$$g(X, X) = g_{\mu\nu} \, dx^\mu \otimes dx^\nu \left(\frac{dx^\alpha}{d\lambda} \partial_\alpha, \frac{dx^\beta}{d\lambda} \partial_\beta \right)$$

$$= g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda}(\lambda) \frac{dx^\beta}{d\lambda}(\lambda)$$

→ Si $g(X, X) \begin{cases} > 0 \\ = 0 \\ < 0 \end{cases}$, la courbe en P et X sont de genre $\begin{cases} \text{espace} \\ \text{lumière} \\ \text{temps} \end{cases}$

→ La longueur d'une courbe de genre temps est donnée par

$$\Lambda = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sqrt{\underbrace{-g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda}}_{>0}} \, d\lambda = \int \sqrt{-g_{\alpha\beta} \, dx^\alpha dx^\beta} \triangleq \int \sqrt{-ds^2}$$

aussi appelée temps propre ($/\!/ \tau = \int \sqrt{-ds^2}$)

↳ Par abus de langage, on appelle parfois la quantité scalaire $ds^2 = g_{\alpha\beta} \, dx^\alpha dx^\beta$ la métrique.

4.3 Application des formes diff. : éqs de Maxwell

→ On veut pouvoir écrire les équations de Maxwell en présence de gravitation / dans un ref. quelconque.

DEF Sur une variété Lorentzienne (M, g), on définit l'opération appelée dual de Hodge agissant sur les formes diff. par :

$$* : \Omega^p(M) \longrightarrow \Omega^{n-p}(M)$$

$$\omega = \frac{1}{p!}\omega_{\mu_1 \dots \mu_p} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p} \longmapsto * \omega = \frac{1}{p!} \epsilon^{\nu_1 \dots \nu_p}{}_{\mu_1 \dots \mu_{n-p}} \omega_{\nu_1 \dots \nu_p} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_{n-p}}$$

↳ Les composantes de la $(n-p)$ forme est donc

$$(* \omega)_{\mu_1 \dots \mu_{n-p}} = \frac{1}{p!} \epsilon^{\nu_1 \dots \nu_p}{}_{\mu_1 \dots \mu_{n-p}} \omega_{\nu_1 \dots \nu_p} \quad \text{où}$$

DEF $\epsilon_{\mu_1 \dots \mu_n}$ est le tenseur de Levi-Civita défini par

$$\epsilon_{\mu_1 \dots \mu_n} \begin{cases} +\sqrt{|g|} & \text{si } (\mu_1 \dots \mu_n) \text{ est une permutation paire de } (1, \dots, n) \\ -\sqrt{|g|} & \text{si } (\mu_1 \dots \mu_n) \text{ est une permutation impaire de } (1, \dots, n) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où $|g| \equiv |\det(g_{\mu\nu})|$

Equations de Maxwell :

→ Puisque le tenseur de Faraday est antisymétrique ($F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$), on peut écrire $F = \frac{1}{2}(F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu)$ (qui est une 2-forme)

→ Une écriture invariante sous les transfo de Poincaré est la suivante :

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu \qquad \partial_{[\mu} F_{\nu\lambda]} = 0$$

Mais cette forme n'est pas conservée pour les ref en accélérations (ou en présence de gravité).

DEF Les équations de Maxwell en présence de gravité sont :

$$d(*F) = *J \qquad dF = 0$$

avec $(*F)$ est une $(4-2) = 2$ forme ⇝ $d(*F)$ est une $(2+1) = 3$-forme

avec $J \equiv J_\mu dx^\mu = g_{\mu\nu} J^\nu dx^\mu$ est une 1-forme ⇝ $*J = (4-1)$ forme

4.4 Connexions, transport // et dérivées covariantes

→ La différentielle extérieure représente une opération de différentiation tensorielle, mais ne s'applique qu'aux champs des p-formes $\Omega^p(M)$. On veut introduire une dérivée covariante, une opération agissant sur des champs de tenseurs arbitraires (qui se réduit à la dérivée ordinaire en coordonnées localement inertielles), qui se transforme de façon tensorielle sous changement général des coordonnées.

DEF Une connexion affine est une application

$$\nabla : \begin{pmatrix} \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) & \longrightarrow & \mathfrak{X}(M) \\ (X,Y) & \longmapsto & \nabla_X Y \end{pmatrix} \quad \text{satisfaisant :}$$

① $\nabla_X (Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$ } bilinéarité

② $\nabla_{(X+Y)} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$

③ $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$ $\quad$ ∇ est $C^\infty(M,\mathbb{R})$-linéaire en X

④ $\nabla_X (fY) = X(f)\, Y + f \nabla_X Y$ $\quad$ règle de Leibniz pour Y

$$= df(X)\, Y + f \nabla_X Y$$

⊙ Qu'est-ce que ce champ de vecteur $\nabla_X Y$?

→ Dans une carte locale (U,φ) autour d'un point P, $\varphi(P) = x^\mu(P)$, une connexion affine est définie par la donnée de $(\dim M)^3 = n^3$ fonctions, appelés les coefficients de connexion définit par

$$\nabla_{\partial_\mu} \partial_\nu \equiv \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\, \partial_\alpha \qquad \text{où } \{\partial_\mu\} = \text{base coord de } T_pM$$

→ Cette action sur les vecteurs de base définit l'action sur tout vecteur :

$\forall X = X^\mu \partial_\mu,\ Y = Y^\alpha \partial_\alpha \in \mathfrak{X}(M)$, $\quad$ ↷ fonctions

$$\nabla_X Y = \nabla_{X^\mu \partial_\mu} (Y^\alpha \partial_\alpha) = X^\mu \nabla_{\partial_\mu} (Y^\alpha \partial_\alpha)$$

$$= X^\mu (\partial_\mu Y^\alpha \partial_\alpha + Y^\alpha \nabla_{\partial_\mu} \partial_\alpha)$$

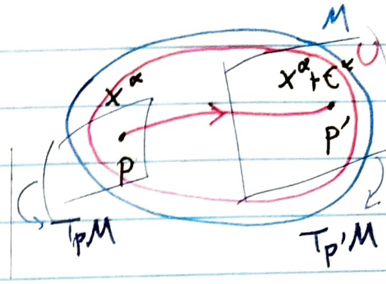
$$= X^\mu (\partial_\mu Y^\beta + Y^\alpha \Gamma^\beta_{\mu\alpha})\, \partial_\beta$$

↳ $$(\nabla_X Y)^\beta = X^\mu (\partial_\mu Y^\beta + Y^\alpha \Gamma^\beta_{\mu\alpha})$$

= composante du champ de vecteur résultant.

⊙ Interprétation et rôle des coefficients de connexion :

→ Permettent de comparer (connecter) des éléments d'espaces tangents en différents points, pour ensuite définir une notion de dérivée pour les champs de vecteurs.



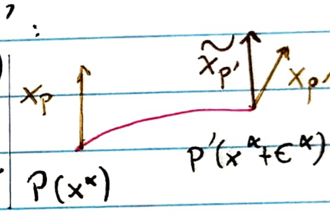
DEF On définit le transport parallèle de X_p vers le point p' infinitésimalement proche de p :

$$\tilde{X}^\alpha\big|_{p'} \equiv X^\alpha\big|_p - \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\big|_p X^\beta\big|_p \epsilon^\gamma$$

tel que $\widetilde{\alpha X^\mu + \beta Y^\mu} = \alpha \tilde{X}^\mu + \beta \tilde{Y}^\mu$ (linéarité)

→ Le transport // requiert la donnée de n^3 coefficients $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$

→ On peut à présent comparer 2 vecteurs au point p' :



→ On a $\underbrace{X^\mu(x^\alpha + \underbrace{\epsilon Y^\alpha}_{=\epsilon^\alpha})}_{= X^\mu(p')} = X^\mu(x^\alpha) + \epsilon^\alpha \partial_\alpha X^\mu(x^\alpha)$

→ On a $\tilde{X}^\mu(x^\alpha + \epsilon Y^\alpha) = X^\mu(x^\alpha) - \Gamma^\mu_{\beta\gamma}(x^\alpha)\, X^\beta(x^\alpha)\, \epsilon^\gamma$

DEF On définit la dérivée covariante dans la direction Y selon

$$(\nabla_Y X)^\mu = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{X^\mu(x^\alpha + \epsilon Y^\alpha) - \tilde{X}^\mu(x^\alpha + \epsilon Y^\alpha)}{\epsilon}$$

$$= \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\epsilon Y^\alpha \partial_\alpha X^\mu + \Gamma^\mu_{\beta\gamma} X^\beta \epsilon Y^\gamma}{\epsilon}$$

$$(\nabla_Y X)^\mu = Y^\alpha (\partial_\alpha X^\mu + \Gamma^\mu_{\beta\alpha} X^\beta)$$

⊙ Remarques :

→ L'opérateur ∇_Y est la généralisation naturelle de l'opérateur de dérivée directionnelle agissant sur les fonctions :

$$Y(f) = Y^\alpha \partial_\alpha f$$

→ La dérivée covariante fournit un candidat pour généraliser la notion de dérivée d'un champ de vecteurs

Not : Soit $X = \partial_\mu$. Alors on écrit :

$$(\nabla_{\partial_\mu} Y)^\beta = \nabla_\mu Y^\beta = \partial_\mu Y^\beta + \Gamma_{\mu}{}^{\beta}{}_{\alpha} Y^\alpha$$

→ ∇ peut être vu comme un opérateur :

$$\nabla : \begin{pmatrix} \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{X}^*(M) \times \mathcal{X}(M) \\ V \longmapsto \nabla V \end{pmatrix}$$

où ∇V est un champ de tenseur (1,1) puisque ∇V doit être évalué en un vecteur et un covecteur pour donner une fonction :

$$\nabla V(X, \omega) = \nabla_X V(\omega) \in \mathrm{Fun}(M)$$

⊙ Loi de transformation sous difféomorphismes :

→ On va contraindre les n^3 coef. de connexions $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$ en demandant que ∇V soit un tenseur (i.e. que les composantes $\nabla_\mu V^\nu$ se transforment bien) :

→ On veut que $\underbrace{\nabla_{\mu'} V^{\nu'}}_{ⓐ} \overset{!}{=} \underbrace{\frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \nabla_\mu V^\nu}_{ⓑ}$

avec $\nabla_{\mu'} V^{\nu'} = \partial_{\mu'} V^{\nu'} + \Gamma_{\mu'}{}^{\nu'}{}_{\alpha'} V^{\alpha'}$

$\nabla_\mu V^\nu = \partial_\mu V^\nu + \Gamma_{\mu}{}^{\nu}{}_{\alpha} V^\alpha$. On a donc :

ⓐ $\nabla_{\mu'} V^{\nu'} = \partial_{\mu'} V^{\nu'} + \Gamma_{\mu'}{}^{\nu'}{}_{\alpha'} V^{\alpha'}$

$$= \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \partial_\mu \left[\frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} V^\nu \right] + \Gamma_{\mu'}{}^{\nu'}{}_{\alpha'} V^\alpha \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha}$$

$$= \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \partial_\mu \left[V^\nu \right] \cdot \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} V^\nu \frac{\partial^2 x^{\nu'}}{\partial x^\nu \partial x^\mu} + \Gamma_{\mu'}{}^{\nu'}{}_{\alpha'} V^\alpha \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha}$$

ⓑ $\dfrac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \cdot \dfrac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \partial_\mu V^\nu + \dfrac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \cdot \dfrac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \Gamma_{\mu}{}^{\nu}{}_{\alpha} V^\alpha$

ⓐ = ⓑ : $\Gamma_{\mu'}{}^{\nu'}{}_{\alpha'} V^\alpha \dfrac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} = \left(\dfrac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \cdot \dfrac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \Gamma_{\mu}{}^{\nu}{}_{\alpha} - \dfrac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \dfrac{\partial^2 x^{\nu'}}{\partial x^\mu \partial x^\alpha} \right) V^\alpha \Big/ \dfrac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\beta'}}$

$$\Leftrightarrow \Gamma_{\mu'}{}^{\nu'}{}_{\beta'} = \underbrace{\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\beta'}} \cdot \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \cdot \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \Gamma_{\mu}{}^{\nu}{}_{\alpha}}_{\text{partie tensorielle}} + \underbrace{\frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\alpha} \cdot \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x^{\mu'} \partial x^{\beta'}}}_{\text{partie non tensorielle}}$$

?

→ Les coefficients de connexion $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ ne sont pas les composantes d'un tenseur (1,2). Par contre ils sont construits tels que $\nabla_\mu V^\nu$ le soient.

DEF | On appelle tenseur de torsion la partie antisymétrique des coeff. de connexion : $T^{\alpha}_{\mu\nu} \hat{=} 2\Gamma^{\alpha}_{[\mu\nu]} = 2 \cdot \frac{1}{2}(\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} - \Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta})$

→ On ne considèrera que des connexions sans torsion afin que le principe d'équivalence tienne. Ainsi :

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} = \Gamma^{\alpha}_{\nu\mu}$$

⊙ Généralisation à des champs de tenseurs quelconques :

DEF | On définit la dérivée covariante de fonctions (0-forme) par

$$\nabla_X(f) = X(f) \quad \text{(dérivée directionnelle)}$$

→ La règle de Leibniz pour la connexion affine devient :

$$\nabla_X(fY) = X(f)Y + f\nabla_X Y = \nabla_X f \cdot Y + f\nabla_X Y \quad \text{règle de Leibniz "classique"}$$

→ On demande que, étant donnés T_1, T_2 des champs de tenseurs qlq,

$$\nabla_X(T_1 \otimes T_2) = \nabla_X T_1 \otimes T_2 + T_1 \otimes \nabla_X T_2$$

→ Soit $\omega \in \Omega^1(M) = \mathcal{X}^*(M)$ ⇒ Pour $Y \in \mathcal{X}(M)$, $\omega(Y) \in \mathrm{Fun}(M)$

Donc $\nabla_X(\omega(Y)) = X[\omega(Y)]$

$\hookrightarrow (\nabla_X\omega)(Y) + \omega(\nabla_X Y) = (\nabla_X\omega)_\alpha Y^\alpha + \omega_\alpha(\nabla_X Y)^\alpha$

$= (\nabla_X\omega)_\alpha Y^\alpha + \omega_\alpha \partial_X Y^\alpha + \omega_\alpha \Gamma^{\alpha}_{X\beta} Y^\beta = (\nabla_X\omega)_\alpha Y^\alpha + \omega_\alpha X^\mu \partial_\mu Y^\alpha + \omega_\alpha X^\mu \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta} Y^\beta$

$\hookrightarrow X^\mu \partial_\mu(\omega_\alpha Y^\alpha) = X^\mu Y^\alpha \partial_\mu \omega_\alpha + X^\mu \omega_\alpha \partial_\mu Y^\alpha$

→ $(\nabla_X\omega)_\beta \cancel{Y^\beta} = -\omega_\alpha X^\mu \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta} \cancel{Y^\beta} + Y^\beta X^\mu \partial_\mu \omega_\beta$

$\Leftrightarrow (\nabla_X\omega)_\beta = X^\mu(\partial_\mu \omega_\beta - \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}\omega_\alpha)$

→ On en déduit la dérivée covariante des 1-formes :

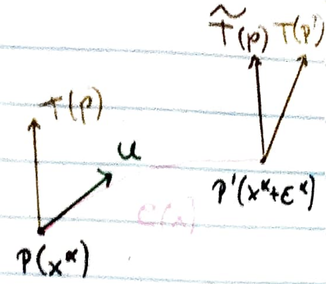
$$\nabla_\mu \omega_\alpha = \partial_\mu \omega_\alpha - \Gamma^{\gamma}_{\mu\alpha}\omega_\gamma$$

En général :

$$\nabla_\alpha T^{\mu_1 \cdots \mu_p}{}_{\nu_1 \cdots \nu_q} = \partial_\alpha T^{\mu_1 \cdots \mu_p}{}_{\nu_1 \cdots \nu_q} + \Gamma^{\mu_1}_{\alpha\beta} T^{\beta\mu_2 \cdots \mu_p}{}_{\nu_1 \cdots \nu_q} + \Gamma^{\mu_2}_{\alpha\beta} T^{\mu_1\beta\mu_3 \cdots \mu_p}{}_{\nu_1 \cdots \nu_q} + \cdots$$
$$- \Gamma^{\beta}_{\alpha\nu_1} T^{\mu_1 \cdots \mu_p}{}_{\beta\nu_2 \cdots \nu_q} - \Gamma^{\beta}_{\alpha\nu_2} T^{\mu_1 \cdots \mu_p}{}_{\nu_1\beta \cdots \nu_q} - \cdots$$

exemple : $\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = \partial_\alpha g_{\mu\nu} - \Gamma^{\beta}_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} - \Gamma^{\beta}_{\alpha\nu} g_{\mu\beta}$

⊙ Transport parallèle le long d'une courbe :



→ Soit $x^\alpha(\lambda)$ une courbe dans M de vecteur tangent $U^\alpha = \dfrac{dx^\alpha}{d\lambda}$ (composante dans une carte locale)

DEF Un champ de vecteur est dit transporté parallèlement à cette courbe $\Leftrightarrow$ $\nabla_U T = 0$

$$\Leftrightarrow \lim_{\epsilon\to 0} \frac{T(x^\alpha+\epsilon U^\alpha) - \tilde{T}(x^\alpha+\epsilon U^\alpha)}{\epsilon} = 0 \quad \forall\, x^\alpha$$

$$\Leftrightarrow \tilde{T}(p') = T(p') \quad \left(\tilde{T}^\mu_{p\to p'} = T^\mu - \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\big|_p T^\alpha\big|_p \epsilon^\beta \right)$$

⊙ Connection métrique :

→ Sur une variété munie d'une métrique (M,g), on peut demander une "compatibilité" entre la connexion et la métrique.

DEF Une connexion métrique sur (M,g) est telle que le transport // préserve le produit scalaire.

→ Soit une courbe de vecteur tangent U, et $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ deux champs de vecteur transportés parallèlement le long de celle-ci :

$$\nabla_U X = \nabla_U Y = 0$$

↳ On veut que le produit scalaire soit conservé :

$$\nabla_U [g(X,Y)] \overset{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \nabla_U [g(X,Y)] = (\nabla_U g)(X,Y) + g(\overset{0}{\cancel{\nabla_U X}}, Y) + g(X, \overset{0}{\cancel{\nabla_U Y}}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\nabla_U g)(X,Y) = 0 \Leftrightarrow U^\mu (\nabla_\mu g)(X^\alpha \partial_\alpha, Y^\beta \partial_\beta) = 0$$

$$\Leftrightarrow U^\mu X^\alpha Y^\beta \nabla_\mu g_{\alpha\beta} = 0 \quad \Leftrightarrow \nabla_\mu g_{\alpha\beta} = 0$$

↳ La connexion ∇ sur une variété (pseudo-) Riemannienne (M,g) satisfaisant $\nabla_\mu g_{\alpha\beta} = 0$ est appelée connexion métrique.

→ On peut alors exprimer les coefficients de connexion en fonction de la métrique. On considère :

$$① \ \nabla_\mu g_{\alpha\beta} = \partial_\mu g_{\alpha\beta} - \Gamma^\gamma_{\mu\alpha} g_{\gamma\beta} - \Gamma^\gamma_{\mu\beta} g_{\alpha\gamma}$$

$$② \ \nabla_\alpha g_{\beta\mu} = \partial_\alpha g_{\beta\mu} - \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} g_{\gamma\mu} - \Gamma^\gamma_{\alpha\mu} g_{\beta\gamma}$$

$$③ \ \nabla_\beta g_{\mu\alpha} = \partial_\beta g_{\mu\alpha} - \Gamma^\gamma_{\beta\mu} g_{\gamma\alpha} - \Gamma^\gamma_{\beta\alpha} g_{\mu\gamma}$$

$$① - ② - ③ : \partial_\mu g_{\alpha\beta} - \partial_\alpha g_{\beta\mu} - \partial_\beta g_{\mu\alpha} + 2\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} g_{\gamma\mu} = 0 \ \Big| \ g^{\mu\nu}$$

$$\Leftrightarrow 2\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\delta^\nu_\gamma = g^{\mu\nu}(-\partial_\mu g_{\alpha\beta} + \partial_\alpha g_{\beta\mu} + \partial_\beta g_{\mu\alpha})$$

DEF $$\Leftrightarrow \Gamma^\nu_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu}(\partial_\alpha g_{\mu\beta} + \partial_\beta g_{\alpha\mu} - \partial_\mu g_{\alpha\beta})$$

Cette connexion sans torsion ($\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \Gamma^\alpha_{\gamma\beta}$) et métrique est appelée connexion de Levi-Civita, et les Γ sont appelés les symboles de Christoffel.

↳ La connexion est alors unique !

THM : On peut tjs annuler les symboles de Christoffel $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ en un point par un changement de coordonnées approprié. $\blacksquare$

Preuve : Dans le ref SCLI, on a $\partial_{\hat\alpha} g_{\hat\mu\hat\nu} = 0$

③ Commentaires :

① Si V^α est un tenseur, $\nabla_\mu V^\alpha$ aussi

② Dans un SCLI, $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = 0$ et donc $\nabla_\mu \mapsto \partial_\mu$. On peut facilement généraliser les équations valides en RR en remplaçant ∂_μ par ∇_μ.

Exemple : Maxwell. $\nabla_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu$

③ La torsion doit être nulle car sinon :

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \Gamma^\alpha_{(\beta\gamma)} + \Gamma^\alpha_{[\beta\gamma]}, \quad \Gamma^\alpha_{[\beta\gamma]} = \frac{1}{2} T^\alpha_{\beta\gamma} \text{ qui est un tenseur.}$$

Or, si $T^\alpha_{\beta\gamma} \neq 0$ qq part, il doit être $\neq$ partout ③